

Title	Z _p 拡大のKummer生成元について(代数的整数論と数論的幾何学)
Author(s)	佐藤, 宏孝
Citation	数理解析研究所講究録 (1995), 925: 166-177
Issue Date	1995-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/59795
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

\mathbb{Z}_p 拡大の Kummer 生成元について

東京外語大 佐藤宏孝 (Hiroataka Sato)

§ 1. 序

p を素数、 \mathbb{Z}_p を p 進整数環とする。また、 $n \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$\zeta_n = \exp(2\pi i/n) \in \mathbb{C}$$

とする。

$\zeta_n \in K$ なる有限次代数体 K に対して、 \mathbb{Z}_p 拡大の 1-st layer の Kummer 生成元を求める問題は、20 年程前から研究されている。

[2][3][5] は、主として、 K が虚 2 次体で $p = 2$ の場合について具体的な結果を得た。また、[6][7][8][9] は、一般の K に対して、その単数群とイデアル類群から計算するアルゴリズムを示した。

一方、[1] は (K, p) に関する Leopoldt 予想：

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}_p} \text{Gal}(K_{\mathbb{Z}_p} / K) = r_2 + 1$$

($K_{\mathbb{Z}_p}$ は K の \mathbb{Z}_p 拡大すべての合成体、 r_2 は K の complex primes の個数とする)

を調べるために、 K の \mathbb{Z}_p 拡大を具体的に構成する方法をとった。

我々は、[1] の方法を出発点にして、ある種の有限次 abel 体 K の \mathbb{Z}_p 拡大をなるべく多く、具体的な生成元を示して構成したい。

Vandiver予想が正しいような素数 p に対して、 $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ 分体の場合は $K_{\mathbb{Z}_p}$ の生成元を与えることができる (§ 2 命題 2)。

しかし、一般の K (これにも条件がつくが) の場合には、 $(p+1)/2$ 個の独立な \mathbb{Z}_p 拡大を得るにとどまる (§ 3 定理)。

最後に、 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-m})$ (m はsquare freeの正整数)、 $p = 2$ の場合にその non-cyclotomic \mathbb{Z}_p 拡大の 1-st layer の Kummer生成元を具体的に計算してみる (§ 4)。

§ 2. q 分体の場合

$$q = \begin{cases} p & p > 2 \\ 4 & p = 2 \end{cases} \quad \text{とし、} \mathbb{Q}[n] = \mathbb{Q}(\zeta_n) \text{ を } n \text{ 分体とする } (n \in \mathbb{Z}).$$

この § では、 $K = \mathbb{Q}[q]$ とする。

$K_n = \mathbb{Q}[q p^n]$ ($n=0, 1, 2, \dots$)、 $K_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$ とすれば、 K_∞ は K の cyclotomic \mathbb{Z}_p 拡大である。

$\text{Gal}(K_\infty / K)$ の位相的生成元 τ を

$$\zeta_{q p^n}^\tau = \zeta_{q p^n}^{1+q} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

で定義する。簡単のために、 τ の K_n への制限も τ で表す。

次の補題 1 はよく知られている。

補題 1

$\alpha \in K_n^\times$ に対し、

$$K_n(\sqrt[p^n]{\alpha})/K : \text{abelian} \Leftrightarrow \alpha^{\tau-1-q} \in (K_n^\times)^{p^n}$$

多項式 $f_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ($n=0,1,2,\dots$) を次の補題 2 で定義する。

補題 2 ([1])

$f_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ($n=0,1,2,\dots$) と $R_n \in \mathbb{Z}$ を

$$1 + X + X^2 + \dots + X^{p^n-1} = (X - 1 - q) \cdot f_n(x) + R_n$$

で定める。

そのとき、 $p^n \mid R_n$ である。

証明

$R_n = \{(1+q)^{p^n} - 1\}/q$ である。 $1+q \bmod qp^n$ は、 $(\mathbb{Z}/qp^n\mathbb{Z})^\times$ の中で、位数 p^n であるから、 $R_n \equiv 0 \bmod p^n$ となる。□

注意 $f_0(x) = 0$ である。

次の条件を満たす数列 $\{\pi_n\}$ を考える：

$$\pi_n \in K_n, \quad N_{K_{n+1}/K_n}(\pi_{n+1}) = \pi_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

[1] に従って、数列 $\{\pi_n\}$ から、数列 $\{\alpha_n\}$ を次のように作る：

$$\alpha_n = \pi_0 \pi_n^{q^{f_n(\tau)}} \in K_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$\alpha_0 = \pi_0$ である。

$$L_n = K_n(\sqrt[p^n]{\alpha_n}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とすれば、次の命題が成り立つ。

命題 1 ([1])

上の記号のもとで、

(1) L_n / K は abelian である。

(2) $L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_n \subset \cdots$

証明

(1) : $f_n(x)$ の定義から $\alpha_n^{\tau-1-q}$ を計算することによって、 $\alpha_n^{\tau-1-q} \in K_n^{\times p^n}$ を示すことができる。補題 1 より L_n / K は abelian である。

(2) : 同様の計算から、 $\alpha_{n+1}/\alpha_n \in K_{n+1}^{\times p^n}$ がわかり、

$$K_{n+1}(\sqrt[p^n]{\alpha_n}) = K_{n+1}(\sqrt[p^n]{\alpha_{n+1}})$$

よって、 $L_n \subset K_{n+1}(\sqrt[p^n]{\alpha_n}) = K_{n+1}(\sqrt[p^n]{\alpha_{n+1}}) \subset L_{n+1}$ \square

次の補題は難しいものではない。証明は、たとえば [10] にある。

補題 3

n と m は 1 より大きい整数で、 $n \mid m$ かつ $n, m \not\equiv 2 \pmod{4}$ とする。

素数 q に対して、 $\sigma_q \in \text{Gal}(\mathbb{Q}[n]/\mathbb{Q})$ を $\xi_n \mapsto \xi_n^q$ で定義する (Frobenius automorphism)。

そのとき、 $N_{\mathbb{Q}[m]/\mathbb{Q}[n]}(1-\xi_m) = (1-\xi_n)^{y(m,n)}$, $y(m,n) = \prod (1-\sigma_q^{-1})$ となる。ただし、 \prod は $q \mid m$ かつ $q \nmid n$ なる素数 q にわたる積とする。 $q \mid m$ かつ $q \nmid n$ なる素数 q がない場合は、 $y(m,n) = 1$ とする。

さて、

$$\pi_n = 1 - \zeta_{q,p^n} \in K_n^\times \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とおくと、補題 3 より

$$N_{K_{n+1}/K_n}(\pi_{n+1}) = \pi_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が満たされるから、

$$\alpha_n = \pi_0 \cdot \pi_n^{q^{f_n(\tau)}} \in K_n, \quad L_n = K_n(\sqrt[n]{\alpha_n}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とすれば、命題 1 より

$$L_n/K \text{ は abelian かつ } L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n \subset \dots$$

となる。

$$L_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n \text{ とする。}$$

命題 2

p は、素数で、 $p \nmid h(\mathbb{Q}[p]^+)$ ($h(\mathbb{Q}[p]^+)$ は $\mathbb{Q}[p]$ の最大実部分体の類数) を満たすとする (つまり、 p は Vandiver 予想が成り立つような素数)。

そのとき、

(1) L_∞/K は、 \mathbb{Z}_p^2 拡大である。

(2) Δ を $\text{Gal}(K_\infty/\mathbb{Q})$ の torsion 部分群とする。 Δ は $p > 2$ のとき (resp. $p=2$ のとき)、位数 $p-1$ の (resp. 位数 2 の) 巡回群である。 $\sigma \in \Delta$ に対して、

$$L_n^\sigma = K_n(\sqrt[n]{\alpha_n^\sigma}), \quad L_\infty^\sigma = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n^\sigma, \quad \widetilde{L}_\infty = \prod_{\sigma \in \Delta} L_\infty^\sigma \text{ とおく。そのとき、} \widetilde{L}_\infty = K_{\mathbb{Z}_p} \text{ である。}$$

証明

(1) : $(1-\zeta_q)$ は K の素イデアルだから、 $\alpha_0 = 1-\zeta_q \notin K^{\times p}$ よって

$$[L_0 : K] = q$$

また、 $L_0 \cap K_\infty = K$ である。実際、 $L_0 \cap K_\infty \neq K$ とすれば、

$$K(\sqrt[p]{1-\xi_q}) = K_1$$

であり、従って、 $1-\xi_q = \xi_q^i \cdot x^p$ ($\exists x \in K, \exists i \in \mathbb{Z}$) と書ける。よって、 $(1-\xi_q) = (x)^p$ だが、これは、 $(1-\xi_q)$ が素イデアルであることに反する。

特に、 $\alpha_0 \notin K_n^{*p}$ であるから、 $\alpha_n = \alpha_0 \cdot \pi_n^{q^n f_n(\tau)} \notin K_n^{*p}$ であり、従って、

$$[L_n : K_n] = qp^n$$

ゆえに、 $\text{Gal}(L_\infty/K_\infty) \simeq \mathbb{Z}_p$

L_∞/K は abelian だから、 L_∞ は K の \mathbb{Z}_p^2 拡大となる。

(2) : $p=2$ のときは、 $L_\infty = K_{\mathbb{Z}_2}$ となり明らか。 $p>2$ とする。 C を、 K の cyclotomic p -unit 群 (i.e. ξ_p と $\{1-\xi_p^\sigma : \sigma \in \Delta\}$ で生成される K^\times の部分群) とする。また、 E と H は、それぞれ K の単数群、円単数群とする。

M を \widetilde{L}_∞ に含まれる K の最大 elementary abel p -拡大とする。 $M = \prod_{\sigma \in \Delta} L_\sigma$ であるから、 $\text{Gal}(M/K) \simeq CK^p/K^p \simeq C/C \cap K^p$

ところで、仮定 $p \nmid h(\mathbb{Q}[p]^+)$ より $p \nmid (E:H)$ であるが、このことから、 $C \cap K^p = C^p$ がわかる。実際、 $\varepsilon^p \in C \cap K^p$ ($\varepsilon \in K$) とすると、 ε は p -unit だから、 $\varepsilon = (1-\xi_p)^a \eta$ ($a \in \mathbb{Z}, \eta \in E$) と書ける。 $\varepsilon^p = (1-\xi_p)^{ap} \eta^p \in C$ より、 $\eta^p \in C \cap E = H$ であり、 p 乗は E/H の automorphism だから、 $\eta \in H$ となる。従って、 $\varepsilon \in C$ となり、 $C \cap K^p \subset C^p$ よって、 $C \cap K^p = C^p$

ゆえに、 $\text{Gal}(M/K) \simeq C/C^p$

$\dim_{\mathbb{F}_p} C/C^p = (p+1)/2$ だから、 $\text{Gal}(\widetilde{L}_\infty/K) \simeq \mathbb{Z}_p^{\frac{p+1}{2}}$

(K, p) に関する Leopoldt 予想は正しいから、 $\widetilde{L}_\infty = K_{\mathbb{Z}_p}$ \square

§ 3. 一般の場合

$m = \prod_{i=1}^r q_i^{e_i}$, 各 q_i は素数で $\equiv 1 \pmod p$, e_i は正の整数とする。

この § では、 K は

$$\mathbb{Q}[q] \subset K \subset \mathbb{Q}[qm]$$

を満たす体とする。

§ 2 と同様に、 $K_n = K(\xi_{q^n})$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $K_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$ とし、 $\text{Gal}(K_\infty/K)$ の位相的生成元 τ を

$$\xi_n^\tau = \xi_{n^{1+q}} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

で定める。

$$\pi_n = N_{\mathbb{Q}[q^n m]/K_n}(1 - \xi_{q^n m}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とおくと、 $\{\pi_n\}$ は $N_{K_{n+1}/K_n}(\pi_{n+1}) = \pi_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を満たすので、

$$\alpha_n = \pi_0 \cdot \pi_n^{q^f n(\tau)} \in K_n, \quad L_n = K_n(\sqrt[q^n]{\alpha_n}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とおけば、命題 1 と同じ方法で

$$L_n/K \text{ は abelian かつ } L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n \subset \dots$$

が証明できる。

また、

$$\pi_n^\circ = N_{K_n/\mathbb{Q}[q^n]}(\pi_n) = N_{\mathbb{Q}[q^n m]/\mathbb{Q}[q^n]}(1 - \xi_{q^n m}) \in \mathbb{Q}[q^n] \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とおく。

$\{\pi_n^\circ\}$ も $N_{\mathbb{Q}[q^{n+1}]/\mathbb{Q}[q^n]}(\pi_{n+1}^\circ) = \pi_n^\circ$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を満たすので、

$$\alpha_n^\circ = \pi_0^\circ \cdot \pi_n^{\circ q^f n(\tau)}, \quad L_n^\circ = \mathbb{Q}[q^n](\sqrt[q^n]{\alpha_n^\circ}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とおくと、

$$L_n^\circ / \mathbb{Q}[q] \text{ は abelian かつ } L_0^\circ \subset L_1^\circ \subset L_2^\circ \subset \cdots \subset L_n^\circ \subset \cdots$$

である。 $L_\infty^\circ = \bigcup_{n=0}^\infty L_n^\circ$ とおく。

$f_n(x)$ を具体的に表し、補題 3 を使って α_n° を計算することによって次の補題 4 が得られる。

補題 4

m のみによって定まる次のような自然数 N が存在する：

任意の $n \geq N$ に対して

$$\alpha_n^\circ = (1 - \xi_q)^{p^{Nt}} \cdot x^{p^N} \text{ ただし、 } t \in \mathbb{Z} \text{ は } p \text{ と素、 } x \in \mathbb{Q}[qp^n]$$

定理

m, K は上の条件を満たすものとし、また p は $p \nmid h(\mathbb{Q}[p]^+)$ 満たす素数とする。

そのとき、

(1) L_∞/K は \mathbb{Z}_p^2 拡大である。

(2) $p > 2$ とする。 $\text{Gal}(\mathbb{Q}[p^\infty m]/\mathbb{Q})$ の torsion 部分群を $\text{Gal}(\mathbb{Q}[qm]/\mathbb{Q})$ と同一視し、 $\text{Gal}(\mathbb{Q}[qm]/\mathbb{Q}) = \text{Gal}(\mathbb{Q}[qm]/\mathbb{Q}[m]) \times \text{Gal}(\mathbb{Q}[qm]/\mathbb{Q}[q])$ なる分解の第 1 成分 $\text{Gal}(\mathbb{Q}[qm]/\mathbb{Q}[m]) = \Delta$ とおく ($\Delta \simeq \text{Gal}(\mathbb{Q}[q]/\mathbb{Q})$ である)。 Δ を $\text{Gal}(\mathbb{Q}[p^\infty m]/\mathbb{Q})$ の部分群とみなし、また、 $\sigma \in \Delta$ の K_n への制限も σ で表す。 $\sigma \in \Delta$ に対して、 $L_n^\sigma = K_n(\sqrt[p^n]{\alpha_n^\sigma})$, $L_\infty^\sigma = \bigcup_{n=0}^\infty L_n^\sigma$, $\widetilde{L}_\infty = \prod_{\sigma \in \Delta} L_\infty^\sigma$ とおく。そのとき、 \widetilde{L}_∞ は $\mathbb{Z}_p^{\frac{p+1}{2}}$ 拡大である。

証明

(1) $\therefore N$ を補題 4 で定義した整数とする。補題 4 より、

$$L_N^\circ = \mathbb{Q}[\zeta p^N](\sqrt[p]{1-\xi_q})$$

である。命題 2 の証明から $[L_N^\circ : \mathbb{Q}[qp^N]] = q$ かつ $L_N^\circ \cap \mathbb{Q}[qp^\infty] = \mathbb{Q}[qp^N]$

補題 4 より容易にわかるように、 $n \geq N$ に対し

$$[L_n^\circ : \mathbb{Q}[qp^n]] = qp^{n-N}$$

である。よって、 $\text{Gal}(L_\infty^\circ / \mathbb{Q}[qp^\infty]) \simeq \mathbb{Z}_p$

従って、 L_∞° は $\mathbb{Q}[q]$ の \mathbb{Z}_p^2 拡大である。

$$\alpha_n^\circ = N_{K_n / \mathbb{Q}[\zeta p^n]}(\alpha_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

であるから、 L_∞ / K も \mathbb{Z}_p^2 拡大である。

(2) : $\sigma \in \Delta$ に対して、 $L_N^{\circ\sigma} = \mathbb{Q}[\zeta p^N](\sqrt[p]{1-\xi_q^\sigma})$ とおくと、命題 1 - (2)

の証明により、

$$\text{rank Gal}(\prod_{\sigma \in \Delta} L_N^{\circ\sigma} \cdot \mathbb{Q}[\zeta p^{nN}] / \mathbb{Q}[\zeta p^N]) = (p+1)/2$$

よって、

$$\text{rank Gal}(\prod_{\sigma \in \Delta} L_N^{\circ\sigma} \cdot K_{N+1} / K_N) = (p+1)/2$$

従って、 \widetilde{L}_∞ / K は $\mathbb{Z}_p^{\frac{p+1}{2}}$ 拡大である。□

§ 4. 例

$p = 2$, $m = \text{square free}$ かつ正の奇数, また、 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-m})$ とする。

$\mathbb{Q}[4] \subset K \subset \mathbb{Q}[4m]$ である。 K の \mathbb{Z}_2 拡大 (独立なものが 3 つある) の 1-st layer を実際に計算してみる。

この場合、[4]の方法を使うと、 π_0 と π_1 は、2 次体の類数と基本単数を使って、次のように表される。

命題 3

m を割る (奇) 素数の個数を r とし、 ρ, ρ' を次のように定める。

$$\rho = 0 \quad \exists p \mid m : p \equiv 1 \pmod{4}$$

$$1 \quad \forall p \mid m : p \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\rho' = 0 \quad \exists p \mid m : p \equiv 1 \text{ または } 3 \pmod{8}$$

$$1 \quad \forall p \mid m : p \equiv 5 \text{ または } 7 \pmod{8}$$

また、square free の整数 d に対して、 h_d は $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の類数、 ε_d は $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の基本単数 (>1) とする。

そのとき、 π_0 と π_1 の絶対値と argument は次のように表される。

	$m \equiv 1 \pmod{4}$ のとき	$m \equiv 3 \pmod{4}$ のとき
$ \pi_0 $	$\varepsilon_m^{-\frac{1}{2}(1-(\frac{2}{m}))h_m}$	$\varepsilon_m^{-\frac{1}{2}h_m}$
$\arg \pi_0$	$-\frac{\pi}{4}(h_{-m} + 2^{r-1}\rho)$	$-\frac{\pi}{4}\left\{(1-(\frac{2}{m}))h_{-m} + 2^{r-1}\rho\right\}$
$ \pi_1 $	$\varepsilon_m^{-\frac{1}{4}(1-(\frac{2}{m}))h_m} \cdot \varepsilon_2^{-2^{r-2}\rho} \cdot \varepsilon_{2m}^{-\frac{1}{4}h_{2m}}$	$\varepsilon_m^{-\frac{1}{4}h_m} \cdot \varepsilon_2^{-2^{r-2}\rho} \cdot \varepsilon_{2m}^{-\frac{1}{4}h_{2m}}$
$\arg \pi_1$	$-\frac{\pi}{8}(h_{-m} + 2^{r-1}\rho + 2^r\rho' + h_{-2m})$	$-\frac{\pi}{8}\left((1-(\frac{2}{m}))h_{-m} + 2^{r-1}\rho + 2^r\rho' + h_{-2m}\right)$

例 1 $m = 3 \cdot 73 = 219$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-219})$ のとき、

$$\varepsilon_{219} = 74 + 5\sqrt{219} , h_{219} = 4 , h_{-219} = 4 , \rho = 0 \text{ より、}$$

$$|\pi_0| = (74 + 5\sqrt{219})^{-2} , \arg \pi_0 = -2\pi$$

よって、 $\alpha_0 = \pi_0 = (74 - 5\sqrt{219})^2$

$74 - 5\sqrt{219} \notin K^{\times 2}$ であることがわかり、 $L_0 = K(\sqrt{74 - 5\sqrt{219}})$ は K の 2 次拡大である。

定理より、これは K の \mathbb{Z}_2 拡大に含まれる。

また、簡単な計算から、 $K(\sqrt{74 - 5\sqrt{219}}) = K(\sqrt{-146})$ がわかる。

よって、 K の \mathbb{Z}_2 拡大の 1-st layer は $K(\sqrt{2})$ (cyclotomic) , $K(\sqrt{1-i})$, $K(\sqrt{-146})$ (これら 3 つは独立) である。

例 2 $m = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1155$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-1155})$ のとき、

上と同様に計算すると、 $\alpha_0 = \pi_0 = \varepsilon_{1155}^{-4}$ となり、 $L_0 = K$ となってしまう。

π_1 を計算すると、 $\pi_1 = \varepsilon_{1155}^{-2} \varepsilon_{2310}^{-2}$ より、

$$\alpha_1 = \pi_0 \cdot \pi_1^4 = \varepsilon_{1155}^{-4} (\dots)^8$$

よって、 $L_1 = K_1(\sqrt[8]{\alpha_1}) = K_1(\sqrt{\varepsilon_{1155}})$

$\sqrt{\varepsilon_{1155}} = (35 + \sqrt{1155})/\sqrt{70}$ となり、 $L_1 = K_1(\sqrt{35})$ がわかる。

K の \mathbb{Z}_2 拡大の 1-st layer は $K(\sqrt{2})$ (cyclotomic) , $K(\sqrt{1-i})$, $K(\sqrt{35})$ (これら 3 つは独立) である。

REFERENCES

- [1] F.Bertrandias and J.-J.Payan, Γ -extensions et invariants cyclotomiques, Ann.Sci.Ecole Norm.Sup.(4),5(1972),517-543
- [2] J.E.Carroll, On determining the quadratic subfields of \mathbb{Z}_2 -extensions of complex quadratic fields,Compositio Math.,30(1975),259-271
- [3] J.E.Carroll and H.Kisilevsky, Initial layers of \mathbb{Z}_2 -extensions of complex quadratic fields,Compositio Math.,32(1976),157-168
- [4] K.H.Dovermann and L.C.Washington, Relations between cyclotomic units and Smith equivalence of representations,Topology,28(1989),81-89
- [5] A.Endo, On the quadratic subfield of a \mathbb{Z}_2 -extension of an imaginary quadratic number field,Proc.Amer.Math.Soc.,101(1987),417-423
- [6] G.Gras, Logarithme p-adique et groupes de Galois,J.Reine Angew.Math.,343(1983),64-80
- [7] G.Gras, Sur les \mathbb{Z}_2 -extensions d'un corps quadratique imaginaire,Ann.Inst.Fourier,33(1983),1-18
- [8] G.Gras, Plongements kummeriens dans les \mathbb{Z}_p -extensions,Compositio Math.,55(1985),383-396
- [9] D.Hemard, Modules galoisiens de torsion et plongement dans les \mathbb{Z}_p -extensions,J.Number theory,30(1988),357-374
- [10] D.Solomon, On a construction of p-units in abelian fields,Invent.Math.,109(1992),329-350